第3章 積　分

3–1 積分的意義

重點整理

一、面積

函數 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 連續，且在此區間內皆有 $f(x)\geq 0$（圖形在 x 軸上方），欲求 $f(x)$ 與 x 軸在 $[a，b]$ 所圍區域 R 的面積，方法如下：

1. 上和及下和：

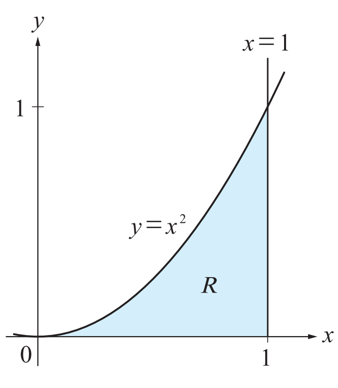
將此區間分成 n 小段，取 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$。

(1) 上和（upper sum）：

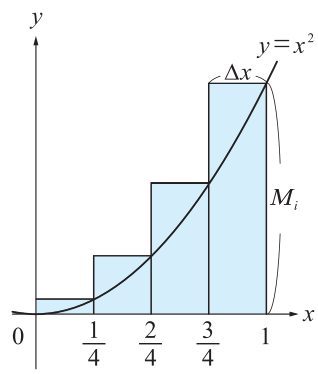
以 Δx 為寬，各小段 $f(x)$ 的最大值 M_i 為高（$i=1，2，3，\cdots\cdots，n$），稱為上矩形。這 n 個矩形面積的總和稱為上和，以 $U_n=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta x$ 表示。

(2) 下和（lower sum）：

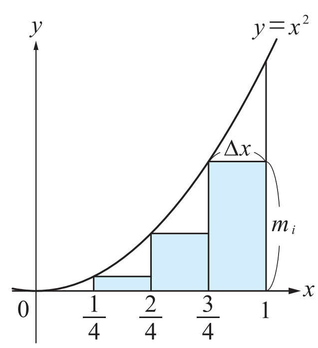
以 Δx 為寬，各小段 $f(x)$ 的最小值 m_i 為高（$i=1，2，3，\cdots\cdots，n$），稱為下矩形。這 n 個矩形面積的總和稱為下和，以 $L_n=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x$ 表示。



圖(一)



圖(二)

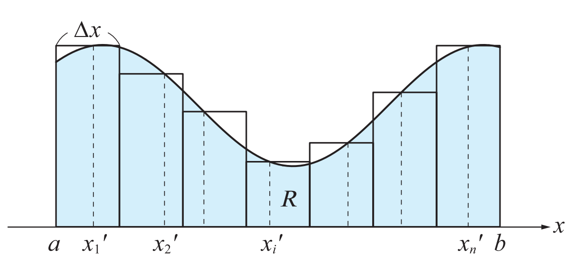


圖(三)

顯然，$L_n\leq R\leq U_n$。

2. 黎曼和：

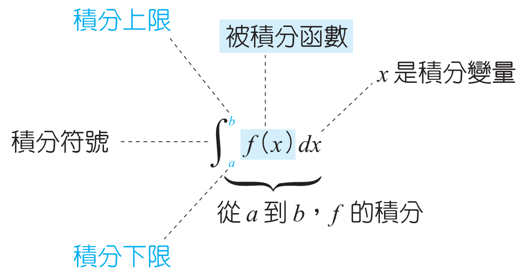
將此區間分成 n 小段，每一小段各取一個點 x_i'（$i=1，2，3，\cdots\cdots，n$），取 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，以 Δx 為寬，函數值 $f(x_i')$ 為該小段長條型的高，則所有長條形的面積總和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i')\Delta x$ 稱為黎曼和，可以作為 R 的近似值。



顯然，黎曼和介於上和與下和之間。

二、定積分

函數 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 為連續函數，則此函數在 $[a，b]$ 的定積分記為 $\int_a^b f(x)dx$，定積分的結果是一個數值，且是上和及下和的共同極限，即 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}L_n$。



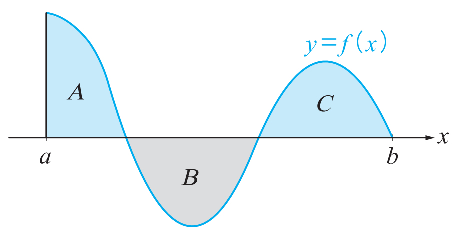
三、定積分的性質

1. 定積分與面積：

(1) 若在 $[a，b]$ 都有 $f(x)\geq 0$，則定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 就是函數 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 與 x 軸所圍區域的面積。

(2) 若在 $[a，b]$ 都有 $f(x)\leq 0$，則定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 就是函數 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 與 x 軸所圍區域的面積之負值。

(3) 當被積分函數 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 的值有正有負時，定積分的結果是
(x 軸上方的面積)－(x 軸下方的面積)。
如下圖，$\int_a^b f(x)dx=A-B+C$。



2. 定積分的運算性質：

定義 1：$\int_a^a f(x)dx=0$。

定義 2：$a>b$ 時，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$。

(1) 定積分的線性性質：

設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 都在 $[a，b]$ 連續，c 為常數，則

① 若 $f(x)\geq 0$ 在 $[a，b]$ 成立，則 $\int_a^b f(x)dx\geq 0$。

② $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$。

③ $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$。

(2) 定積分的區間可加性：

若 $f(x)$ 是 $[a，c]$ 上的連續函數，則

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$，對任意大小順序的 $a，b，c$ 都成立。

例：$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^7 f(x)dx+\int_7^5 f(x)dx$，即

$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^7 f(x)dx-\int_5^7 f(x)dx$。

四、反導函數與不定積分

1. 反導函數：

若函數滿足 $F'(x)=f(x)$，則稱 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的一個反導函數。

例：$(x^4)'=4x^3$，所以 x^4 是 $4x^3$ 的反導函數。

$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的反導函數。

2. 多項式函數的不定積分：

$$\int(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0)\,dx$$

$=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots+\frac{a_2}{3}x^3+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+C$，其中 C 為任意常數。

例：$\int(x+1)\,dx=\frac{x^2}{2}+x+C$，其中 C 為任意常數。

例：$\int(x^2+2x+3)\,dx=\frac{x^3}{3}+x^2+3x+C$，其中 C 為任意常數。

五、微積分基本定理

1. 微積分基本定理：

若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，則 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$，其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數，也就是 $F'(x)=f(x)$。

2. 定積分的計算：

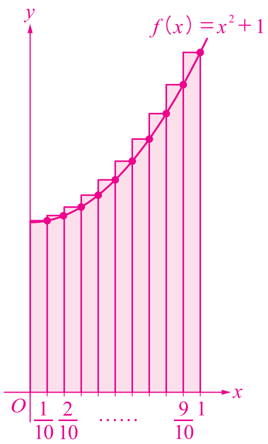
$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$，也就是先找到 $f(x)$ 的一個反導函數 $F(x)$，再計算 $F(b)-F(a)$ 即為所求。

例：欲求定積分 $\int_1^2(2x+3)\,dx$ 的值，首先找到 $2x+3$ 的一個反導函數 $F(x)=x^2+3x$，其次，計算 $F(2)-F(1)=(4+6)-(1+3)=6$ 即為所求。

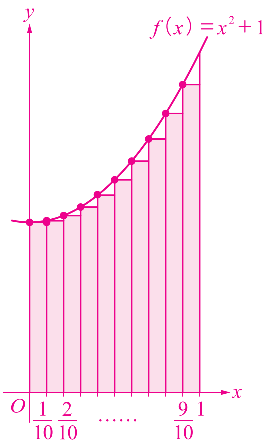
例題 1　上和及下和

將 $[0，1]$ 分成 10 段，試求函數 $f(x)=x^2+1$ 在 $[0，1]$ 內的圖形與 x 軸所圍區域面積的上和與下和。（各 5 分）

解 將 $[0，1]$ 分成 10 段，每段寬為 $\frac{1}{10}|1-0|=\frac{1}{10}$



圖(一)



圖(二)

(1) 如圖(一)，取各段函數值最大值為該矩形的高，分別為

$\frac{1}{100}+1，\frac{4}{100}+1，\cdots\cdots，\frac{100}{100}+1$

故上和為 $U_{10}=\frac{1}{10}\left(\frac{1+4+9+\cdots+100}{100}+10\right)=\frac{1}{10}\left(\frac{385}{100}+10\right)=\frac{277}{200}$

(2) 如圖(二)，取各段函數值最小值為該矩形的高，分別為

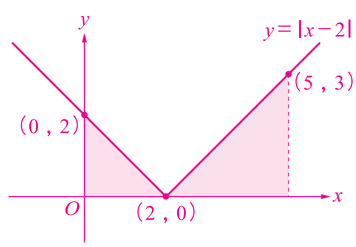
$0+1，\frac{1}{100}+1，\frac{4}{100}+1，\cdots\cdots，\frac{81}{100}+1$

故下和為 $L_{10}=\frac{1}{10}\left(\frac{0+1+4+\cdots+81}{100}+10\right)=\frac{1}{10}\left(\frac{285}{100}+10\right)=\frac{257}{200}$

例題 2　用面積計算定積分（絕對值函數、分段定義函數）

(1) 試求定積分 $\int_0^5|x-2|\,dx$。（5 分）

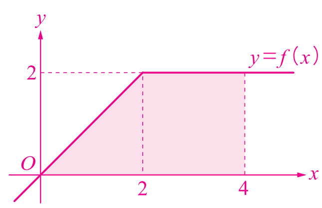
(2) $f(x)=\begin{cases}2，x\geq 2\\ x，x<2\end{cases}$，試求定積分 $\int_0^4 f(x)\,dx$。（5 分）



解 (1) $\int_0^5|x-2|\,dx$ 為函數 $y=|x-2|$ 在 $[0，5]$ 與 x 軸所圍的面積

因此 $\int_0^5|x-2|\,dx=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{13}{2}$

(2) $\int_0^4 f(x)\,dx$ 為函數 $f(x)$ 在 $[0，4]$ 與 x 軸所圍的面積



故得 $\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\times2\times2+2\times2=6$

例題 3　用面積計算定積分（正弦函數）

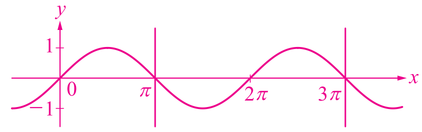
(1) 試求 $\int_{\pi}^{3\pi} \sin x\, dx$。（5 分）

(2) 試求 $\int_{0}^{3\pi} \sin 2x\, dx$。（5 分）

解 (1) 如右圖，正弦函數 $y=\sin x$ 的週期為 2π

一個週期的 $\sin x$ 函數圖形面積恰為 0

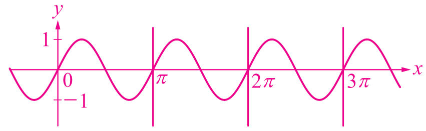
故得 $\int_{\pi}^{3\pi} \sin x\, dx = 0$



(2) 如右圖，$y=\sin 2x$ 的週期為 π

因為一個週期的 $\sin 2x$ 函數圖形面積恰為 0

故得 $\int_{0}^{3\pi} \sin 2x\, dx = 0+0+0=0$



例題 4　用面積計算定積分（半圓的函數表示）

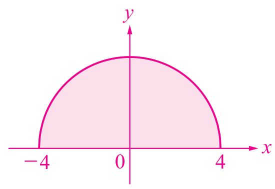
試求 $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\, dx$。（5 分）

解 令 $y=\sqrt{16-x^2}$，圖形為右圖中的曲線

該定積分是要算出該曲線與 x 軸所圍出的區域面積

即為半圓面積 $\frac{1}{2}\times\pi\times 4^2 = 8\pi$

故 $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\, dx = 8\pi$



3-1

翰林用心教師用精益求精

例題 5　定積分的線性性質

(1) 已知 $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=5$，$\int_{-1}^{2} g(x)\,dx=3$，試求 $\int_{-1}^{2}(2f(x)-3g(x))\,dx$。（5 分）

(2) 已知 $\int_{0}^{2\pi}\cos x\,dx=0$，試求 $\int_{0}^{2\pi}(3\cos x+2)\,dx$。（5 分）

解 由定積分的線性性質，

(1) $\int_{-1}^{2}(2f(x)-3g(x))\,dx=2\int_{-1}^{2}f(x)\,dx-3\int_{-1}^{2}g(x)\,dx=2\times5-3\times3=1$

(2) $\int_{0}^{2\pi}(3\cos x+2)\,dx=3\int_{0}^{2\pi}\cos x\,dx+\int_{0}^{2\pi}2\,dx=0+2\times2\pi=4\pi$

3-1

例題 6　定積分的區間可加性

(1) $\int_{2}^{6} f(x)\,dx=5$，$\int_{6}^{8} f(x)\,dx=3$，試求 $\int_{2}^{8} f(x)\,dx$。（5 分）

(2) $\int_{3}^{6} f(x)\,dx=10$，$\int_{3}^{8} f(x)\,dx=7$，試求 $\int_{8}^{6} f(x)\,dx$。（5 分）

解 由定積分的區間可加性，

(1) $\int_{2}^{8}f(x)\,dx=\int_{2}^{6}f(x)\,dx+\int_{6}^{8}f(x)\,dx=5+3=8$

(2) $\int_{6}^{8}f(x)\,dx=\int_{3}^{8}f(x)\,dx-\int_{3}^{6}f(x)\,dx=7-10=-3$

故 $\int_{8}^{6}f(x)\,dx=-\int_{6}^{8}f(x)\,dx=3$

〈另解〉

$$\begin{aligned}\int_{8}^{6}f(x)\,dx&=\int_{8}^{3}f(x)\,dx+\int_{3}^{6}f(x)\,dx\\&=-7+10\\&=3\end{aligned}$$

例題 7　多項式函數的不定積分

試求下列各不定積分：

(1) $\int 8\,dx$。（5 分）

(2) $\int 2x\,dx$。（5 分）

(3) $\int(-x^2+4)\,dx$。（5 分）

解 (1) $\int 8\,dx=8x+C$，其中 C 為任意常數

(2) $\int 2x\,dx=x^2+C$，其中 C 為任意常數

(3) $\int(-x^2+4)\,dx=-\frac{1}{3}x^3+4x+C$，其中 C 為任意常數

3-1

例題 8　多項式函數的定積分

(1) 試求 $\int_{-1}^{3}(6x^2-2x+5)\,dx$。（5 分）

(2) 試求 $\int_{1}^{3}(x+1)(x-1)(4x+1)\,dx$。（5 分）

解 (1) $\int_{-1}^{3}(6x^2-2x+5)\,dx$

$=(2x^3-x^2+5x)\Big|_{-1}^{3}$

$=(54-9+15)-(-2-1-5)$

$=60-(-8)$

$=68$

(2) $\int_{1}^{3}(x+1)(x-1)(4x+1)\,dx$

$=\int_{1}^{3}(4x^3+x^2-4x-1)\,dx$

$=\left(x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-x\right)\Big|_{1}^{3}$

$=(81+9-18-3)-\left(1+\frac{1}{3}-2-1\right)$

$=69-\left(-\frac{5}{3}\right)$

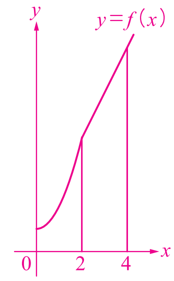
$=\frac{212}{3}$

翰林用心教師用精益求精

例題 9　分段定義函數的定積分

已知 $f(x)=\begin{cases}2x+1，x\geq 2\\x^2+1，x<2\end{cases}$，試求定積分 $\int_0^4 f(x)\,dx$。（10 分）

解 由定積分的區間可加性，



$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)\,dx &= \int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx\\&=\int_0^2 (x^2+1)\,dx+\int_2^4 (2x+1)\,dx\\&=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_0^2+(x^2+x)\Big|_2^4\\&=\left(\frac{8}{3}+2-0\right)+(16+4-4-2)\\&=\frac{14}{3}+14\\&=\frac{56}{3}\end{aligned}$$

例題 10　利用奇函數與偶函數的特性計算定積分

(1) 已知 $f(x)$ 是奇函數，試求 $\int_{-5}^5 f(x)\,dx$。（5 分）

(2) 已知 $g(x)$ 是偶函數，且 $\int_0^2 g(x)\,dx=10$，試求 $\int_{-2}^2 g(x)\,dx$。（5 分）

解 (1) 由定積分的區間可加性，我們有 $\int_{-5}^5 f(x)\,dx=\int_{-5}^0 f(x)\,dx+\int_0^5 f(x)\,dx$

因為奇函數的圖形對稱於原點

所以 $\int_{-5}^0 f(x)\,dx=-\int_0^5 f(x)\,dx$

故得 $\int_{-5}^5 f(x)\,dx=0$

(2) 同理，$\int_{-2}^2 g(x)\,dx=\int_{-2}^0 g(x)\,dx+\int_0^2 g(x)\,dx$

因為偶函數的圖形對稱於 y 軸

所以 $\int_{-2}^0 g(x)\,dx=\int_0^2 g(x)\,dx=10$

故得 $\int_{-2}^2 g(x)\,dx=2\int_0^2 g(x)\,dx=2\times 10=20$

3-1