翰林 110 指定科目考試

趨勢分析

數學考科

師大附中／殷　灝 老師

總召集／陳彥良
總編輯／李心筠
編　輯／歐美靜・蔡瑞菁
校　對／黃美甄
美　編／陳雅惠

出　版／民國 110 年 3 月
發行所／70248 臺南市新樂路 76 號
編輯部／70252 臺南市新忠路 8-1 號
電　話／（06）2619621 #312
E-mail / periodical @ hanlin.com.tw
翰林官網 http://www.hle.com.tw

00847-12
翰林出版

本刊內容同步刊載於翰林官網 http://www.hle.com.tw

翰林 110 指定科目考試 趨勢分析

師大附中・殷　灝 老師

數學考科

壹 前　言

筆者去年已受邀撰寫 109 指考趨勢分析，因此今年將以較為簡潔的方式呈現，99 課綱最後一屆的指考，沒有意外，將與過去幾年相同，數甲維持一定的難度，數乙以偏易的命題為導向，以下是近三年數甲、數乙的頂、前、均標：

(一)數甲部分

年度	頂標	前標	均標
109	60	50	36
108	67	57	43
107	76	66	50

109 年數甲三標相對於 108 年皆大降 7 分，考生普遍反應過難，且時間內根本寫不完，尤其微積分的兩道多選考題：

【109 指考數甲多選 5.】

對一實數 a，以 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數，例如：$[1.2]=[\sqrt{2}]=1$，$[-1.2]=-2$。考慮無理數 $\theta=\sqrt{10001}$，試選出正確的選項。

(1) $a-1<[a]\leq a$ 對任意實數 a 均成立

(2)數列 $b_n=\dfrac{[n\theta]}{n}$ 發散，n 為正整數

(3)數列 $c_n=\dfrac{[-n\theta]}{n}$ 發散，n 為正整數

(4)數列 $d_n=n\left[\dfrac{\theta}{n}\right]$ 發散，n 為正整數

(5)數列 $e_n=n\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]$ 發散，n 為正整數

答 (1)(5)

【109 指考數甲多選 6.】
設 $F(x)$ 、$f(x)$ 皆為實係數多項式函數。已知 $F'(x)=f(x)$ ，試選出正確的選項。
(1)若 $a\geq 0$，則 $F(a)-F(0)=\int_0^a f(t)\,dt$
(2)若 $F(x)$ 除以 x 的商式為 $Q(x)$ ，則 $Q(0)=f(0)$
(3)若 $f(x)$ 可被 $x+1$ 整除，則 $F(x)-F(0)$ 可被 $(x+1)^2$ 整除
(4)若對所有實數 x，$F(x)\geq\dfrac{x^2}{2}$ 都成立，則對所有實數 x，$f(x)\geq x$ 也都成立
(5)若對所有 $x>0$，$f(x)\geq x$ 都成立，則對所有 $x>0$，$F(x)\geq\dfrac{x^2}{2}$ 也都成立

答 (1)(2)

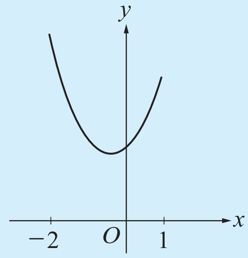
這與過去的考法很不同，題目給的條件很少，不需要太多計算，完全靠觀念來思考判斷選項的對錯，就算是平時認真練習很多題目的學生，面對這兩題可能也不知所措，所以有些老師認為這兩題有利上大學修習過微積分的重考生。不過，這類型的微積分考題，近年的確常出現，只是有些沒有這麼難而已，以下帶各位教師一同回憶一下：

【108 指考數甲多選 6.】
設 $\langle a_n\rangle$ 、$\langle b_n\rangle$ 為兩實數數列，且對所有的正整數 n，$a_n<b_n^2<a_{n+1}$ 均成立。若已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=4$，試選出正確的選項。
(1)對所有的正整數 n，$a_n>3$ 均成立
(2)存在正整數 n，使得 $a_{n+1}>4$
(3)對所有的正整數 n，$b_n^2<b_{n+1}^2$ 均成立
(4) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^2=4$
(5) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=2$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-2$

答 (3)(4)

【108 指考數甲多選 7.】

已知三次實係數多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$，在 $-2\leq x\leq 1$ 範圍內的圖形如示意圖：



試選出正確的選項。

(1) $a>0$

(2) $b>0$

(3) $c>0$

(4)方程式 $f(x)=0$ 恰有三實根

(5) $y=f(x)$ 圖形的反曲點的 y 坐標為正

答 (2)(3)(5)

【107 指考數甲多選 8.】

設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}$ 存在，試選出正確的選項。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2$ 存在

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}$ 存在

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+1)\dfrac{x}{|x|}$ 存在

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在

(5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2$ 存在

答 (1)(2)(5)

【109 指考數甲補考多選 7.】

關於非常數的實係數多項式函數 $f(x)$，試選出正確的選項。

(1)若 $f(1)f(2)<0$，則存在 $c\in(1,2)$ 滿足 $f(c)=0$

(2)若 $f(1)f(2)>0$，則對任意的 $c\in(1,2)$，$f(c)\neq 0$ 均成立

(3)若 $f(1)f(2)f(3)<0$，則存在 $c\in(1,3)$ 滿足 $f(c)=0$

(4)若 $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^2 f(x)\,dx\right)<0$，則存在 $c\in(1,2)$ 滿足 $\int_0^c f(x)\,dx=0$

(5)若 $\int_1^2 f(x)\,dx=0$，則 $f(1)f(2)<0$

答 (1)(4)

至於 110 年指考數甲的難度，筆者認為會比 109 年稍微降低，但會維持在 107 ～ 108 指考數甲難度之間，在準備上，注意以下幾個幾乎年年必考的概念：指對數的應用、正餘弦定理（三角測量）、直線與圓、向量的內積、空間中的直線與平面、平面上的線性變換、數學期望值、複數的極式、微積分。

另外，提供大考中心公告的數甲測驗範圍：

考科	測驗內容
數學甲	高一數學：數與式、多項式函數、指數與對數函數、機率； 高二數學：三角、直線與圓、平面向量、空間向量、空間中的平面與直線、矩陣； 選修科目數學甲：機率統計、三角函數、極限與函數、多項式函數的微積分。

㈡數乙部分

年度	頂標	前標	均標
109	77	62	39
108	85	75	55
107	84	74	52

109 年的數乙，也是屬於近幾年內偏難的一年，但只要肯花時間把課本的基本概念、範例、習題都讀熟，再多算些模考試題，一定就能掌握一定的分數，尤其數乙近年常出現平常會練習到的題庫題，例如：

【109 指考數乙單選 2.】
某畢業班由 8 位同學負責畢旅規劃，分成 A、B、C 三組，且三組分別由 3 人、3 人、2 人組成。8 位同學每人都會被分配到其中一組，且甲、乙兩位同學一定要在同一組。這 8 位同學總共有幾種分組方式？

(1) 140 種　(2) 150 種　(3) 160 種　(4) 170 種　(5) 180 種

答 (1)

【109 指考數乙選填 B】

若隨機變數 X 的可能值為 1、2、3、4，其出現的機率 $P(X=k)$ 與 $\frac{1}{k}$ 成正比，則機率 $P(X=3)$ 為________。

答 $\frac{4}{25}$

【108 指考數乙選填 B】

已知實係數多項式 $f(x)$ 除以 x^2+2 的餘式為 $x+1$。若 $xf(x)$ 除以 x^2+2 的餘式為 $ax+b$，則數對 $(a, b)=$________。

答 $(1, -2)$

【108 指考數乙非選二】

某運輸公司欲向一汽機車製造商訂購一批重型機車（簡稱重機）和汽車。其訂購費用為重機一部 25 萬元及汽車一部 60 萬元，訂購經費上限是 5400 萬元。另此運輸公司共有 100 格停車位，每格停車位恰可停放兩部重機或是停放一部汽車。而此運輸公司每銷售 1 部重機可得淨利潤 2.3 萬元（即 2 萬 3 千元），銷售 1 部汽車則可得淨利潤 5 萬元，並假設此運輸公司可將其所訂購之重機及汽車全數銷售完畢。此運輸公司希望能在訂購經費的上限和停車位之限制下獲得最大的淨利潤。試回答下列問題。

(1)試寫出此問題之線性規劃不等式及目標函數。（4 分）
(2)在坐標平面上畫出可行解區域，並以斜線標示該區域。（3 分）
(3)此運輸公司應訂購重機、汽車各多少部才能獲得最大的淨利潤？此最大淨利潤為何？（6 分）

答 (1) $\begin{cases} 5x+12y\leq 1080 \\ x+2y\leq 200 \\ x, y \text{ 為非負整數} \end{cases}$，$x$，$y$ 分別為重機和汽車的數量，目標函數 $f(x, y)=2.3x+5y$；
(2) 略；
(3) 訂購重機 120 部，汽車 40 部時有最大淨利潤 476 萬元

以上均為只要平常有乖乖在練習，就會做過相同或者極為類似的考題，因此在數乙測驗範圍縮減（見下頁表）、會考平常看過一樣的題目以及整體考題為偏易的設計下，如果同學們還有要放棄數乙的念頭，就真的太傻啦！

以下提供大考中心公告的數乙測驗範圍：

考科	測驗內容
數學乙	高一數學：數與式、多項式函數、指數與對數函數、排列組合、機率、數據分析； 高二數學：直線與圓、平面向量、矩陣； 選修科目數學乙：機率統計、極限與函數。

基本上每個單元都會至少出現 1 題，不適合放棄任何單元，就算有些同學們對某單元較沒 *fu*，也建議要掌握基本觀念及試題，因為可能該單元就是考很簡單的基本題，還是有得分的可能性。

這份指考趨勢分析，接下來簡述了指考各冊的考試重點，並列舉一些筆者曾經出過的模考題供大家教學上的參考，並於最後附上大考中心公告的指定科目考試範圍說明，供各位教師可隨時查閱，以上如有任何疏漏或未考慮周詳之處，也請大家不吝指教。

貳 各冊考點與試題範例

【第一冊】

章節	單元名稱	考點
第一章	數與式	絕對值方程式，不等式及函數圖形，分點公式，算幾不等式
第二章	多項式函數	除法原理，綜合除法，餘式定理，一次因次檢驗法（牛頓定理），虛根共軛成對定理，勘根定理
第三章	指、對數函數	對數運算，首數與尾數，指對數的應用，指對數函數的圖形

【例題 1._甲乙】

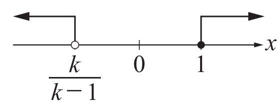
設 k 為常數且 $0<k<1$，則絕對值不等式 $x<k|x-1|$ 的解為下列何者？

(1) $x>\dfrac{k}{k-1}$　(2) $x<\dfrac{k}{k-1}$　(3) $x<\dfrac{k}{k+1}$

(4) $x>\dfrac{k}{k+1}$ 或 $x<\dfrac{k}{k-1}$　(5) $\dfrac{k}{k-1}<x<\dfrac{k}{k+1}$

答 (3)

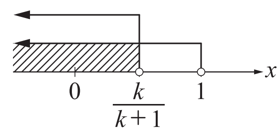
解析 ① 當 $x\geq 1$ 時，$x<k(x-1)$ ⇨ $k<(k-1)x$ ⇨ $\dfrac{k}{k-1}>x$



$(\because 0<k<1$ ⇨ $k-1<0)$

與 $x\geq 1$ 取交集 $\left(\text{注意到 } \dfrac{k}{k-1}<0\right)$ 為 $\varnothing$

② 當 $x<1$ 時，$x<k(1-x)$ ⇨ $(k+1)x<k$ ⇨ $x<\dfrac{k}{k+1}$



與 $x<1$ 取交集 $\left(\text{注意到 } 0<\dfrac{k}{k+1}<1\right)$ 得 $x<\dfrac{k}{k+1}$

綜合①、②，解為 $x<\dfrac{k}{k+1}$

故選(3)

【例題 2._甲乙】
若多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的商式為 $g(x)$，餘式為 2，且 $g(1)=-3$，試問 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為？

(1) 2　(2) -3　(3) 0　(4) $-3x$　(5) $-3x+5$

答 (5)

解析 $f(x)=(x-1)g(x)+2$ ……………………①

$g(1)=-3$ ⇨ $g(x)=(x-1)q(x)-3$……②

②代入①：$f(x)=(x-1)[(x-1)q(x)-3]+2$

$=(x-1)^2q(x)-3(x-1)+2$

$=(x-1)^2q(x)-3x+5$

餘式：$-3x+5$

故選(5)

註 多項式函數的近年大考題，很常出現餘式與除法原理的相關考題，可提醒學生多加注意，列舉如下：

【110 學測單選 5.】
設 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數，滿足 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3+2 的餘式為 $x+2$。若 $f(0)=4$，則 $f(2)$ 的值為下列哪一個選項？

(1) 8　(2) 10　(3) 15　(4) 18　(5) 20

答 (4)

【108 學測多選 12.】

設 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 為實係數三次多項式，$g(x)$ 為實係數二次多項式。已知 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式分別為 $r_1(x)$，$r_2(x)$。試選出正確的選項。

(1) $-f_1(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $-r_1(x)$

(2) $f_1(x)+f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)+r_2(x)$

(3) $f_1(x)f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)r_2(x)$

(4) $f_1(x)$ 除以 $-3g(x)$ 的餘式為 $\dfrac{-1}{3}r_1(x)$

(5) $f_1(x)r_2(x)-f_2(x)r_1(x)$ 可被 $g(x)$ 整除

答 (1)(2)(5)

【108 指考數乙選填 B】

已知實係數多項式 $f(x)$ 除以 x^2+2 的餘式為 $x+1$。若 $xf(x)$ 除以 x^2+2 的餘式為 $ax+b$，則數對 $(a, b)=$______。

答 $(1, -2)$

【107 學測多選 9.】

已知多項式 $f(x)$ 除以 x^2-1 之餘式為 $2x+1$。試選出正確的選項。

(1) $f(0)=1$

(2) $f(1)=3$

(3) $f(x)$ 可能為一次式

(4) $f(x)$ 可能為 $4x^4+2x^2-3$

(5) $f(x)$ 可能為 $4x^4+2x^3-3$

答 (2)(3)(5)

【105 指考數乙多選 4.】

設 $f(x)$ 為一未知的實係數多項式，但知道 $f(x)$ 除以 $(x-5)(x-6)^2$ 的餘式為 $5x^2+6x+7$。根據上述所給條件，請選出正確的選項。

(1)可求出 $f(0)$ 之值

(2)可求出 $f(11)$ 之值

(3)可求出 $f(x)$ 除以 $(x-5)^2$ 的餘式

(4)可求出 $f(x)$ 除以 $(x-6)^2$ 的餘式

(5)可求出 $f(x)$ 除以 $(x-5)(x-6)$ 的餘式

答 (4)(5)

【例題 3._甲乙】

設 $0<x<1$ 且 $M=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{\log_k x}$，$N=\frac{10}{\log_2 x}$，請選出正確的選項。

(1) $M=\frac{1}{\log_{10!} x}$　(2) $N=\log_{1024} x$　(3) $M\cdot N>0$　(4) $M>N$　(5) $M^2>N^2$

答 (1)(3)(5)

解析 (1) ○：$M=\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\cdots\cdots+\frac{1}{\log_{10} x}=\log_x 2+\log_x 3+\cdots\cdots+\log_x 10$

$=\log_x 10!=\frac{1}{\log_{10!} x}$

(2) ×：$N=10\log_x 2=\log_x 2^{10}=\log_x 1024$

(3) ○：$\because 0<x<1$　$\therefore \log x<0$

$M=\log_x 10!=\frac{\log 10!}{\log x}<0$，$N=\log_x 1024=\frac{\log 1024}{\log x}<0$

$\therefore M\cdot N>0$

(4) ×：$\because 10!>1024$，又 $0<x<1$

$\therefore \log_x 10!<\log_x 1024$

$\therefore M<N$

(5) ○：$\because M<N<0$　$\therefore M^2>N^2$

故選(1)(3)(5)

【第二冊】

章節	單元名稱	考點
第二章	排列與組合（數乙專屬單元）	加、乘法原理，一一對應原理，直線排列，不盡相異物的排列，重複排列，分組分堆，重複組合，二項式定理
第三章	機率	古典機率，條件機率，貝氏定理，獨立事件
第四章	數據分析（數乙專屬單元）	算術平均數，標準差，相關係數，迴歸直線，伸縮平移對各統計量的影響

【例題 4._乙】

某便利商店推出 8 種不同款式的公仔。今甲、乙、丙三人各自收集了 6 款公仔，若恰有 5 款公仔是三人都擁有的，則甲、乙、丙三人所收集的公仔共有________種不同的情形。

答 1512

解析 先從 8 款公仔選 5 款是三人共同擁有的，有 C_5^8 種選法，接著再將沒選到的 3 款公仔（設為 A，B，C）分配給此三人：

3 同：$C_1^3=3$

（例如：甲乙丙
A A A

2 同 1 異：$C_2^3\times C_1^2\times\dfrac{3!}{2!}=18$

（例如：甲乙丙
A A B

3 異：$3!=6$

（例如：甲乙丙
A B C

$\therefore$有 $C_5^8\times(3+18+6)=56\times27=1512$ 種

【例題 5._甲乙】

某校數學研究社由 4 名男生及 2 名女生組成。現從其中任意選取兩人去參加數學科展競賽，請選出正確敘述的選項。

(1)參賽的兩人中「至少有 1 名女生」的機率小於 $\dfrac{1}{2}$

(2)參賽的兩人中「恰有 1 名女生」的機率大於「全是男生」的機率

(3)參賽的兩人中「恰有 1 名男生」的事件與「恰有 1 名女生」的事件為獨立事件

(4)參賽的兩人中「至少有 1 名男生」的事件與「至少有 1 名女生」的事件為互斥事件

(5)參賽的兩人中「全是男生」的事件與「全是女生」的事件為相關（相依）事件

答 (2)(5)

解析 (1) ×：$P(\text{至少 1 女})=\dfrac{C_1^4C_1^2+C_2^2}{C_2^6}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}>\dfrac{1}{2}$

(2) ○：$P(\text{恰 1 女})=\dfrac{C_1^4C_1^2}{C_2^6}=\dfrac{8}{15}$，$P(\text{全男})=\dfrac{C_2^4}{C_2^6}=\dfrac{6}{15}$

$\therefore P(\text{恰 1 女})>P(\text{全男})$

(3) ×：設 A 為恰有 1 名男生的事件，B 為恰有 1 名女生的事件

$P(A)=\dfrac{C_1^4C_1^2}{C_2^6}=\dfrac{8}{15}=P(B)=P(A\cap B)$

$P(A\cap B)=\dfrac{8}{15}\neq\left(\dfrac{8}{15}\right)^2=P(A)P(B)$

$\therefore A$，B 不為獨立事件

(4) ×：（至少 1 男）∩（至少 1 女）＝1 男 1 女 $\neq \varnothing$

(5) ◯：P（全男∩全女）$=0$

P（全男）$=\dfrac{C_2^4}{C_2^6}=\dfrac{6}{15}$，$P$（全女）$=\dfrac{C_2^2}{C_2^6}=\dfrac{1}{15}$

⇨ P（全男∩全女）$\neq P$（全男）$\times P$（全女）

∴「全是男生」與「全是女生」的事件不為獨立事件，為相關（相依）事件

故選(2)(5)

【例題 6._甲乙】

有十筆數據 x_1，x_2，……，x_{10} 滿足 $x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{10}$，且其中位數為 M，今加入第十一筆數據 x_{11} 且 $x_{11}>M$，並計算出十一筆數據的中位數為 M'，則下列選項必定成立的是為何？

(1) $M'<M$　(2) $M'=M$　(3) $M'>M$　(4) $M'\leq x_{11}$　(5) $x_{11}>x_5$

答 (3)(4)(5)

解析

$$\begin{cases} x_1<x_2<x_3<\cdots\cdots<x_{10} \\ M=\dfrac{x_5+x_6}{2}\ (x_5<M<x_6) \\ x_{11}>M \longleftrightarrow x_{11}>x_5 \end{cases}$$

① 若 $x_{11}\leq x_6$：

則 $x_1<x_2<\cdots\cdots<x_5<M<x_{11}\leq x_6<x_7<\cdots\cdots<x_{10}$

$M'=x_{11}$，又 $x_{11}>M$　$\therefore M'>M$

以上我們有：$\begin{cases} M'>M \\ M'=x_{11} \end{cases}$

② 若 $x_{11}>x_6$：

則 $\begin{cases} M'=x_6 \\ M'<x_{11} \end{cases}$，又 $x_6>M$　$\therefore M'>M$

綜合以上 $\begin{cases} M'>M \\ M'\leq x_{11} \\ x_{11}>x_5 \end{cases}$

故選(3)(4)(5)

【第三冊】

章節	單元名稱	考點
第一章	三角（數甲專屬單元）	正餘弦定理，和差角公式，倍半角公式，三角測量
第二章	直線與圓	〔數甲〕圓方程式，直線與圓的關係 〔數乙〕直線方程式，二元一次不等式的圖形，線性規劃
第三章	平面向量	向量的線性組合（分點公式、共線定理），向量的內積，柯西不等式，直線參數式，二階行列式

【例題 7._甲】

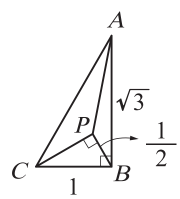
在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，$\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=1$，P為$\triangle ABC$內一點，$\angle BPC=90^\circ$。

(1)若$\overline{PB}=\dfrac{1}{2}$，試求$\overline{PA}$。

(2)若$\angle APC=150^\circ$，試求$\tan\angle PBA$。

答 (1) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$；(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解析 (1) $\triangle ABC$中：



$\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=1 \Rightarrow \overline{CA}=2$

$\angle CAB=30^\circ$，$\angle ACB=60^\circ$

$\triangle BCP$中：

$\overline{CB}=1$，$\overline{PB}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \overline{PC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle PBC=60^\circ$，$\angle PCB=30^\circ$

$\triangle APB$中：

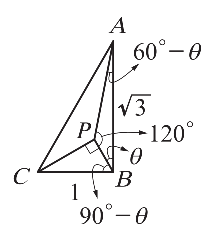
$\angle ABP=90^\circ-\angle PBC=30^\circ$

由餘弦定理：

$$\overline{PA}^2=(\sqrt{3})^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\cos 30^\circ=3+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=\frac{7}{4}$$

$\therefore \overline{PA}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(2) $\angle APB=360^\circ-150^\circ-90^\circ=120^\circ$



設$\angle PBA=\theta$

則$\angle PAB=180^\circ-120^\circ-\theta=60^\circ-\theta$

$\angle PBC=90^\circ-\theta$

$\triangle PBC$中：$\overline{PB}=\cos\angle PBC=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\triangle PAB$ 中：

由正弦定理：

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\angle APB}=\frac{\overline{PB}}{\sin\angle PAB}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\frac{\sin\theta}{\sin(60^\circ-\theta)}$$

$$\Rightarrow 2=\frac{\sin\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\cos\theta=2\sin\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

【例題 8._甲】

過點 $A(0,1)$、$B(4,m)$ 並且與 x 軸相切的圓恰有一個，則 m 可能的值為何？

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 4

答 (1)(2)

解析 設圓心坐標為 (h,k)

$\because$ 與 x 軸相切

$\therefore$ 半徑 $=|k|$

$\Rightarrow$ 圓方程式：$(x-h)^2+(y-k)^2=|k|^2=k^2$

將 A，B 代入

$$\Rightarrow \begin{cases} h^2-2k+1=0 \\ h^2-8h+m^2-2mk+16=0 \end{cases}$$

消去 k，得 $(1-m)h^2-8h+(m^2-m+16)=0$

h 恰有一解有以下 2 種情形：

① 當 $1-m=0$ 時，$m=1$

② 當 $1-m\neq 0$ 時，$D=(-8)^2-4(1-m)(m^2-m+16)=0$

$\Rightarrow m(m^2-2m+17)=0$

$\Rightarrow m=0$

故選(1)(2)

【例題 9._乙】混合題

設二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x-2y\leq 3 \\ 3x+y\geq 2 \end{cases}$，在坐標平面上所表示的區域為 M，試回答下列問題：

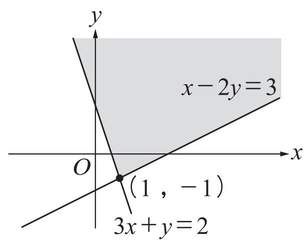
1. 若點（a，b）在區域 M 中，則下列哪些點也一定在區域 M 中？（多選）
   (1)（$a+2$，$b+1$）　(2)（$a-1$，$b+2$）　(3)（a，0）
   (4)（1，b）　(5)（b，a）
2. 若直線 $mx-y=5m+2$ 通過區域 M，則實數 m 的取值範圍為＿＿＿＿＿。
3. 設 k 為實數，若 $\begin{cases} x-2y\leq 3 \\ 3x+y\geq 2 \\ x+y\leq k \end{cases}$ 所表示區域的面積為 21，則 k 之值為＿＿＿＿＿。

答　1.(1)(4)；2. $m>\frac{1}{2}$ 或 $m\leq -\frac{1}{4}$；3. 6

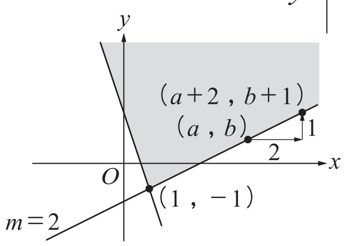
解析　$\begin{cases} x-2y\leq 3 \\ 3x+y\geq 2 \end{cases}$

x	3	0
y	0	$-\frac{3}{2}$

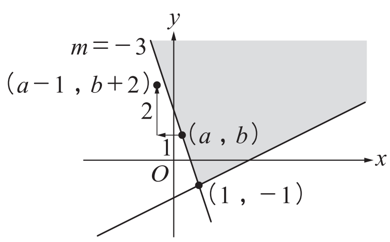
x	$\frac{3}{2}$	0
y	0	2



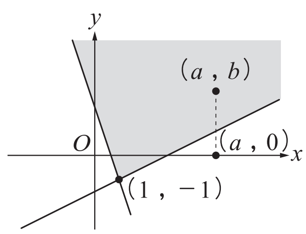
1. (1) ○：



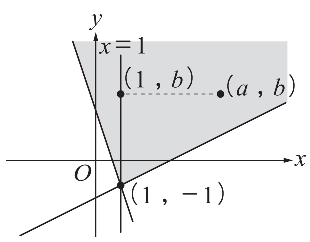
(2) ×：



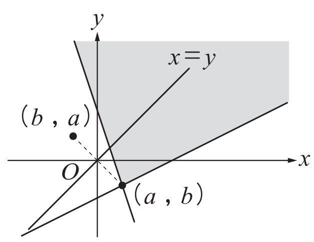
(3) ×：



(4) ○：



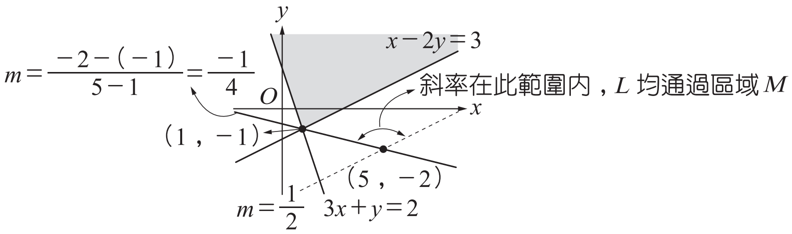
(5) ×：



故選(1)(4)

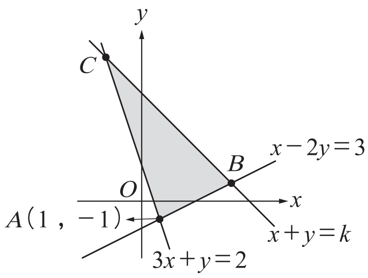
2. L：$mx-y=5m+2$

⇨ $m(x-5)=y+2$，為過點（5，-2），斜率為 m 的直線



$\therefore m>\dfrac{1}{2}$ 或 $m\leq -\dfrac{1}{4}$

3.



$$B：\begin{cases} x-2y=3 \\ x+y=k \end{cases} ⇨ B\left(\frac{2k+3}{3},\frac{k-3}{3}\right)$$

$$C：\begin{cases} 3x+y=2 \\ x+y=k \end{cases} ⇨ C\left(\frac{2-k}{2},\frac{3k-2}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{2k}{3},\frac{k}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{-k}{2},\frac{3}{2}k\right)$$

$$a\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \frac{2k}{3} & \frac{k}{3} \\ \frac{-k}{2} & \frac{3}{2}k \end{vmatrix}\right|=21$$

$$⇨ \frac{1}{2}\left|k^2+\frac{k^2}{6}\right|=21$$

$$⇨ \frac{7}{6}k^2=42$$

$$⇨ k^2=36$$

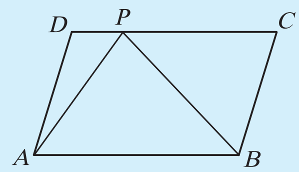
$$⇨ k=\pm 6$$

由圖知：$x+y=k$ 的 x，y 截距均大於 0

$\therefore k=6$

【例題 10_甲乙】

如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{AD}=3$，$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=4$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 之值為________。



答 $\frac{5}{8}$

解析 $\because \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP})$

$\because \overline{CP}:\overline{PD}=3:1$ $\quad \left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)$

$=|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{3}{16}|\overrightarrow{AB}|^2$

$\Rightarrow 4=9-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{3}{16}\times 25$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}$

【第四冊】

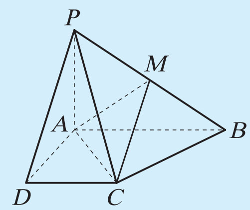
章節	單元名稱	考點
第一章	空間向量 （數甲專屬單元）	兩面角，向量內積，柯西不等式，向量外積，平行六面體體積，三階行列式
第二章	空間中的直線與平面 （數甲專屬單元）	平面方程式，直線方程式，兩線的關係判斷，點到直線的距離，歪斜線的距離，三元一次聯立方程組的幾何意義
第三章	矩陣	〔數甲〕平面上的線性變換 〔數乙〕矩陣的基本運算，高斯消去法，反矩陣，轉移矩陣

【例題11_甲】

如右圖所示，四角錐 $P-ABCD$ 的底面為梯形，$\overline{AB}\,/\!/\,\overline{DC}$，

$\angle DAB=90^\circ$，$\overline{PA}$ 垂直底面 $ABCD$，且 $\overline{PA}=\overline{AD}=\overline{DC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=1$，

M 是 $\overline{PB}$ 的中點，請選出正確的選項。



(1) $\overline{CD}$ 垂直平面 PAD

(2)平面 PAD 垂直平面 PCD

(3) $\angle AMC<90^\circ$

(4)平面 AMC 與平面 BMC 所成的二面角大於 135°

(5)向量 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{PB}$ 的夾角餘弦值為 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

答 (1)(2)(3)

解析 (1) ○：$\overline{PA}\perp$平面 $ABCD$，$\overline{AD}\perp\overline{DC}$

由三垂線定理得 $\overline{PD}\perp\overline{DC}$

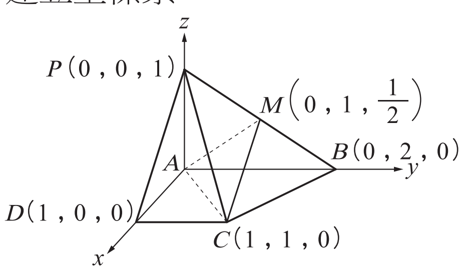
又 $\overline{CD}\perp\overline{AD}$

$\therefore\overline{CD}\perp$平面 PAD

(2) ○：$\because\overline{CD}\perp$平面 PAD 且平面 PCD 包含直線 $\overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$平面 $PAD\perp$平面 PCD

(3) ○：建立坐標系：



$\overrightarrow{MA}=\left(0\ ,\ -1\ ,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{MC}=\left(1\ ,\ 0\ ,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$$\cos\angle AMC=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}}{|\overrightarrow{MA}|\,|\overrightarrow{MC}|}=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{5}{4}}}=\frac{1}{5}>0$$

$\therefore\angle AMC<90^\circ$

(4) ×：設二面角為 θ

平面 AMC 之法向量 $\vec{n_1}=\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MC}=\left(\frac{1}{2}，-\frac{1}{2}，1\right)\,/\!/\,(1，-1，2)$

平面 BMC 之法向量 $\vec{n_2}=\overrightarrow{MB}\times\overrightarrow{MC}$

$$=\left(0，1，-\frac{1}{2}\right)\times\left(1，0，-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}，-\frac{1}{2}，-1\right)\,/\!/\,(1，1，2)$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}=\frac{1-1+4}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{2}{3}>0 \quad \therefore\theta<90^\circ$$

(5) ×：設 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{PB}$ 的夾角為 ϕ

$\overrightarrow{AC}=(1，1，0)$，$\overrightarrow{PB}=(0，2，-1)$

$$\cos\phi=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{PB}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$$

故選(1)(2)(3)

【例題12_甲】

空間中點 $P(2，1，0)$ 關於平面 $E：x+y-z=0$ 的對稱點為 Q，從點 Q 向 xy 平面所作的垂線為 $\overline{QR}$，S 為直線 $L：x=y=z$ 上一點，請選出正確的選項。

(1) Q 點坐標為 $(0，-1，2)$

(2) R 點坐標為 $(0，-1，0)$

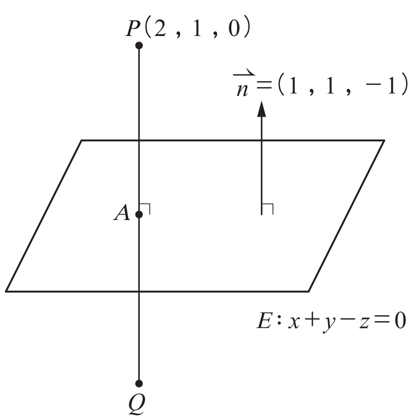
(3)過 P、Q、R 三點的平面方程式為 $x-y-1=0$

(4)$\triangle PQR$ 的面積為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(5)四面體 $PQRS$ 的體積為 2

答 (1)(2)(3)

解析 (1) ○：



$\overleftrightarrow{PQ}$：$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=0-t \end{cases}$ 代入 E：$2+t+1+t-(-t)=0$

⇨ $t=-1$

⇨ $A(1,0,1)$

⇨ $Q(0,-1,2)$

(2) ○：Q 投影至 xy 平面⇨ $R(0,-1,0)$

(3) ○：$\overrightarrow{PQ}=(-2,-2,2)$

$\overrightarrow{PR}=(-2,-2,0)$

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(4,-4,0)\,/\!/\,(1,-1,0)$

$\therefore x-y=\underset{P\text{代入}}{\underline{1}}$

(4) ×：$a\triangle PQR=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

(5) ×：$\vec{L}=(1,1,1)$ 與 $x-y=1$ 之法向量 $(1,-1,0)$ 垂直

又 L 上點 $O(0,0,0)$ 不在 $x-y=1$ 上

$\therefore L$ 與平面 $x-y=1$ 平行

$\therefore V_{PQRS}=\dfrac{1}{3}\times a\triangle PQR\times d(O,x-y=1)=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{3}$

故選(1)(2)(3)

【例題 13_乙】

設 a，b，c，d 為實數且 $a>b$。已知二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為轉移矩陣，請選出正確的選項。

(1) $a+b=c+d$

(2) $c<d$

(3) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的反方陣必存在

(4)數對 (a,b) 在坐標平面上的圖形為一個三角形的內部

(5) $4a+b$ 的最大值為 5

答 (2)(3)

解析 (1) ×：$a+c=b+d=1$

(2) ○：$\because a>b$ 且 $a+c=b+d$

$\therefore c<d$

(3) ○：$\because \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

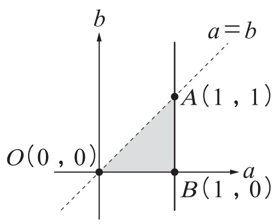
又 $a > b \geq 0$

$d > c \geq 0$

⇨ $ad > bc$

$\therefore \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ ⇨反方陣存在

(4) ×：$1 \geq a > b \geq 0$



圖形為△內部與兩條邊界（不含線段 $\overline{AO}$）

(5) ×：A（1，1）不在可行解區域

$\therefore 4a + b$ 取不到最大值 5

故選(2)(3)

【例題14_甲】

設二階方陣 M 在平面上定義的線性變換是鏡射變換，則 M 不可能將點（1，$\sqrt{3}$）映射至？

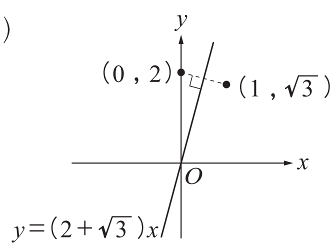
(1)（0，2）　(2)（2，0）　(3)（-1，$\sqrt{3}$）

(4)（$-\sqrt{3}$，-1）　(5)（-2，1）

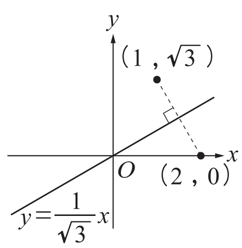
答 (5)

解　析 鏡射變換的鏡射軸為通過原點的直線，因此選項的點與點（1，$\sqrt{3}$）之中垂線必須過原點

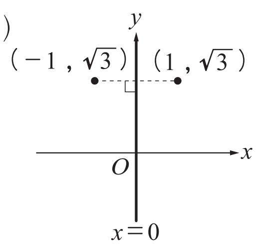
(1)



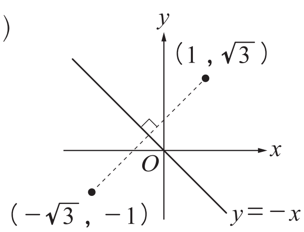
(2)



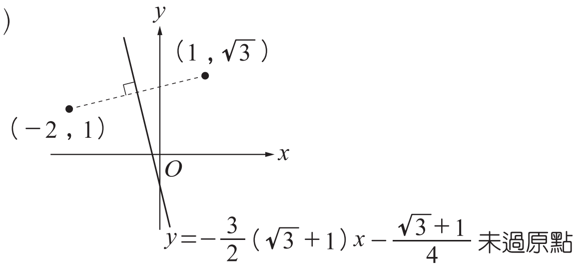
(3)



(4)



(5)



故選(5)

【選修數學甲上、選修數學乙上】

章節	單元名稱	考點
第一章	機率與統計	隨機變數的期望值，變異數，標準差，二項分布，常態分佈、信賴區間（數乙）
第二章	三角函數（數甲專屬單元）	三角函數的圖形，正餘弦疊合，複數絕對值及四則運算的幾何意義，複數的極式與棣美弗定理，複數的 n 次方根

【例題 15._甲乙】

已知甲袋中有 1 個紅球，乙袋中有 3 個紅球和 3 個藍球。今從乙袋中隨機抽取 k 個球放入甲袋中（$1\leq k\leq 6$）。

Ⅰ、設 P_k 表示甲袋放入 k 球後，從甲袋取出 1 球是紅球的機率

Ⅱ、設隨機變數 X_k 表示甲袋放入 k 球後所含有的紅球個數

請選出正確的選項。

(1) $P_1=\dfrac{3}{4}$

(2) $P_1<P_2$

(3) $P(X_1=1)=P(X_1=2)$

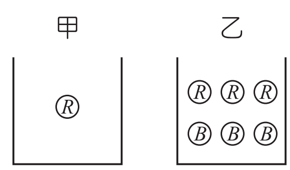
(4) $P(X_2=1)=P(X_2=2)=P(X_2=3)$

(5) $E(X_1)=E(X_2)$

答 (1)(3)

解析 (1) ○：從乙抽Ⓡ放入甲，再從甲抽出Ⓡ：$\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$

從乙抽Ⓑ放入甲，再從甲抽出Ⓡ：$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$



$\therefore P_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

(2) ×：從乙抽ⓇⓇ放入甲，再從甲抽出Ⓡ：

$$\frac{C^3_2}{C^6_2}\times 1=\frac{1}{5}$$

從乙抽ⓇⒷ放入甲，再從甲抽出Ⓡ：

$$\frac{C^3_1C^3_1}{C^6_2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$$

從乙抽ⒷⒷ放入甲，再從甲抽出Ⓡ：

$$\frac{C^3_2}{C^6_2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$$

$$\therefore P_2=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{15}$$

$$=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

(3) ○

(4) ×

(5) ×：

X_1	$1(乙\xrightarrow{Ⓑ}甲)$	$2(乙\xrightarrow{Ⓡ}甲)$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P(X_1=1)=P(X_1=2)=\frac{1}{2}$$

$$E(X_1)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

X_2	$1(乙\xrightarrow{ⒷⒷ}甲)$	$2(乙\xrightarrow{ⓇⒷ}甲)$	$3(乙\xrightarrow{ⓇⓇ}甲)$
P	$\frac{C^3_2}{C^6_2}=\frac{1}{5}$	$\frac{C^3_1C^3_1}{C^6_2}=\frac{3}{5}$	$\frac{C^3_2}{C^6_2}=\frac{1}{5}$

$$P(X_2=1)=P(X_2=3)\neq P(X_2=2)$$

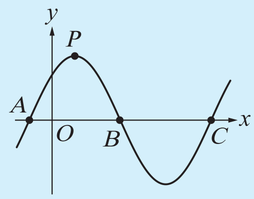
$$E(X_2)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$$

$$\therefore E(X_1)\neq E(X_2)$$

故選(1)(3)

【例題 16_甲】

設 a 為正實數，函數 $y=\sin ax+\cos ax$ 的部分圖形如右所示。若 P 為圖形的最高點，A、B、C 為圖形與 x 軸的交點且 $\cos\angle APC=-\dfrac{1}{\sqrt{33}}$，請選出正確敘述的選項。



(1) P 點到 x 軸的距離為 1
(2) $\tan\angle APC=-4\sqrt{2}$
(3) $\triangle APC$ 的面積為 $4\sqrt{2}$
(4) $a=\dfrac{1}{2}$
(5) B 點坐標為 $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

答 (2)(5)

解析 $y=\sin ax+\cos ax$

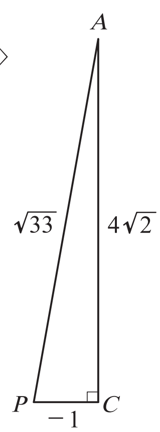
$=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin ax+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos ax\right)$

$=\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ\sin ax+\sin 45^\circ\cos ax)$

$=\sqrt{2}\,\sin(ax+45^\circ)$

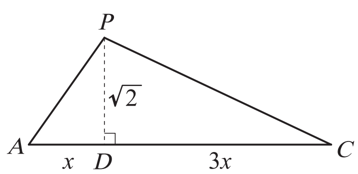
(1) ×：$d(P, x\text{軸})=\sqrt{2}$

(2) ○：$\cos\angle APC=-\dfrac{1}{\sqrt{33}}$ ⇨



⇨ $\tan\angle APC=-4\sqrt{2}$

(3) ×：



$\triangle APC$ 中：

過 P 作 $\overline{AC}$ 之垂線，得垂足 D

令 $\overline{AD}=x$，則 $\overline{CD}=3x$（$\because \overline{AB}=\overline{BC}$ 且 $\overline{DB}=\overline{AD}$）

$$\tan\angle APC=\tan(\angle APD+\angle CPD)$$
$$=\frac{\tan\angle APD+\tan\angle CPD}{1-\tan\angle APD\times\tan\angle CPD}$$
$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{3x}{\sqrt{2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{2}}\times\frac{3x}{\sqrt{2}}}=\frac{\frac{4x}{\sqrt{2}}}{1-\frac{3x^2}{2}}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}x}{2-3x^2}=-4\sqrt{2}$$

$\Rightarrow 3x^2-2=x$

$\Rightarrow 3x^2-x-2=0$

$\Rightarrow (3x+2)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=1$

$\therefore \overline{AC}=4x=4$

$\triangle APC$ 面積 $=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

(4) ×：週期 $=\overline{AC}=4=\frac{2\pi}{a}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\pi$

(5) ○：$y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

令 $y=0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x=2k-\frac{1}{2}$

取 $k=1\Rightarrow x=\frac{3}{2}\Rightarrow B\left(\frac{3}{2},0\right)$

故選(2)(5)

【例題17_甲】

已知複數平面上 O 為原點，兩相異點 A、B 所對應之複數分別為 z_1、z_2，若 $\frac{|z_1|}{3}=\frac{|z_2|}{5}=\frac{|z_1+z_2|}{7}$ 且 $\triangle OAB$ 的面積為 $15\sqrt{3}$，求 $|z_1-z_2|$ 的值為 ________。

答 $2\sqrt{19}$

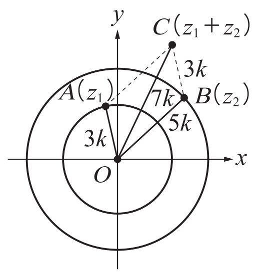
解析 令 $|z_1|=3k$

$|z_2|=5k$

$|z_1+z_2|=7k$

z_1+z_2 對應的點為 C

$OBCA$ 為平行四邊形



$\triangle OBC$ 中，$\cos B=\dfrac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times 3k\times 5k}=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \angle OBC=120^\circ$

$\triangle OBC$ 面積$=\dfrac{1}{2}\times 3k\times 5k\times \sin 120^\circ=\dfrac{15}{4}\sqrt{3}\,k^2$

又$\triangle OAB$ 面積$=\triangle OBC$ 面積

$\Rightarrow 15\sqrt{3}=\dfrac{15}{4}\sqrt{3}\,k^2 \Rightarrow k=2$

得 $\overline{OA}=6$，$\overline{OB}=10$

$\triangle OAB$ 中，$\angle AOB=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

$|z_1-z_2|=\overline{AB}=\sqrt{6^2+10^2-2\times 6\times 10\times \cos 60^\circ}$

$=\sqrt{36+100-60}$

$=\sqrt{76}$

$=2\sqrt{19}$

【選修數學甲下、選修數學乙下】

章節	單元名稱	考點
第一章	極限與函數	數列的極限，無窮等比級數，函數的極限，夾擠定理
第二章	多項式函數的微積分（數甲專屬單元）	導數與切線，一次微分與增減性，二次微分與凹凸性，三次多項式函數圖形的分類，微積分基本定理，定積分求曲線間的面積，旋轉體體積

【例題18._甲乙】

設〈a_n〉為一等差數列，令 $S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$。請選出極限值必定相同的選項。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+a_{n-1}}{n}$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n\cdot a_{n-1}}{n^2}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n+S_{n-1}}{n^2}$　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n\cdot S_n}{n^3}$

答 (1)(4)

解析 設〈a_n〉的公差為 d

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+(n-1)d}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{dn}{n}=d$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+a_{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+(n-1)d+a_1+(n-2)d}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{dn+dn}{n}=2d$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n\cdot a_{n-1}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[a_1+(n-1)d][a_1+(n-2)d]}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{dn\cdot dn}{n^2}=d^2$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n+S_{n-1}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]+\frac{n-1}{2}[2a_1+(n-2)d]}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{d}{2}n^2+\frac{d}{2}n^2}{n^2}=d$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n\cdot S_n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[2a_1+(n-1)d]\cdot\frac{n}{2}\cdot[2a_1+(n-1)d]}{n^3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{dn\cdot\frac{n}{2}\cdot dn}{n^3}=\dfrac{d^2}{2}$

故選(1)(4)

【例題19._甲】

設 a，b 為大於 0 的實數，若實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $\int_a^x f(t)\,dt=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+bx-16$

且 $f(x)$ 有極小值 0，則數對 (a, b) 之值為________。

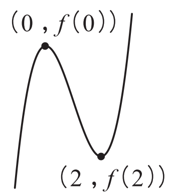
答 (4，4)

解　析 $\int_a^x f(t)\,dt=\frac{1}{4}x^4-x^3+bx-16\cdots\cdots(*)$

$(*)$ 左右兩邊對 x 微分 ⇨ $f(x)=x^3-3x^2+b$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

又 $f(x)$ 領導係數 >0



$f(x)$ 極小值為 $f(2)=8-12+b=0$ ⇨ $b=4$

$x=a$ 代入 $(*)$ ⇨ $0=\frac{1}{4}a^4-a^3+4a-16$

⇨ $a^4-4a^3+16a-64=0$

⇨ $(a-4)(a^3+16)=0$

又 $a>0$ $\therefore a=4$

參 結　語

99 課綱即將畫下句點，接著而來的是 108 課綱的新制大考，取消數學乙考科，而留下的數學甲也與 99 課綱不同，並沒有將各單元切分為三顆星、二顆星、一顆星，換言之，是否又回到過去聯考年代，每個單元都可能命題的情況呢？還是會依然像 99 課綱，主要命題的概念是以銜接大學理工學院需要用到的數學為主？目前大考變革的走向看起來還不夠明朗，教師們得隨時注意新的資訊，並充實自己，以調整教學步調來因應課綱與大考的重大改變，在此與各位教師共勉之。

肆 附　錄

本文最後附上大考中心所公告的指定科目考試數學考科考試說明，供各位教師可以隨時查閱。

【指定科目考試數學考科測驗範圍】

下頁表為 99 課綱微調數學科各章節，並列出數學甲、數學乙考科相對應的測驗範圍。各試題解題的主要概念，出自標示「＊＊＊」的章節中；標示「＊＊」的章節不是主要的測驗範圍，但解題時會用到此章節的基本概念或技巧；標示「＊」表示不在該考科的直接命題範圍內，但試題有多種解法時，若用此章節的概念或技巧解題，仍可得分。有關正式考試時是否可使用計算器，請參見當年度考試簡章說明中之規定。

第一學年　數學 I（函數）、4 學分

主題	子題	內容	備註	數學甲考科	數學乙考科
一、數與式	1. 數與數線	1.1 數線上的有理點及其十進位表示法 1.2 實數系：實數的十進位表示法、四則運算、絕對值、大小關係 1.3 乘法公式、分式與根式的運算	1.2 不含非十進位的表示法	＊＊	＊＊
	2. 數線上的幾何	2.1 數線上的兩點距離與分點公式 2.2 含絕對值的一次方程式與不等式		＊＊＊	＊＊＊
二、多項式函數	1. 簡單多項式函數及其圖形	1.1 一次函數 1.2 二次函數 1.3 單項函數：奇偶性、單調性和圖形的平移	1.3 僅介紹 4 次（含）以下的單項函數	＊＊	＊＊＊（不含複數）
	2. 多項式的運算與應用	2.1 乘法、除法（含除式為一次式的綜合除法）、除法原理（含餘式定理、因式定理）及其應用、插值多項式函數及其應用	2.1 不含最高公因式與最低公倍式、插值多項式的次數不超過三次	＊＊＊	
	3. 多項式方程式	3.1 二次方程式的根與複數系 3.2 有理根判定法、勘根定理、$\sqrt[n]{a}$ 的意義 3.3 實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理	3.1 不含複數的幾何意涵		
	4. 多項式函數的圖形與多項式不等式	4.1 辨識已分解的多項式函數圖形及處理其不等式問題	4.1 不含複雜的分式不等式	＊＊	

三、指數、對數函數	1. 指數 2. 指數函數 3. 對數 4. 對數函數 5. 指數與對數的應用	1.1 指數為整數、分數與實數的指數定律 2.1 介紹指數函數的圖形與性質（含定義域、值域、單調性、凹凸性） 3.1 對數的定義與對數定律 3.2 換底公式 4.1 介紹對數函數的圖形與性質（含定義域、值域、單調性、凹凸性） 5.1 對數表（含內插法）與使用計算器、科學記號 5.2 處理乘除與次方問題 5.3 等比數列與等比級數 5.4 由生活中所引發的指數、對數方程式與不等式的應用問題	3.2 換底公式不宜牽涉太過技巧性與不實用的問題 5.1 不含表尾差 5.4 不含等比數列、級數之定義，但在斟酌流暢度的考量下，可以包含等比應用問題	＊＊＊	＊＊＊
附錄	認識定理的敘述與證明	介紹命題、充分條件、必要條件、充要條件、反證法（含 $\sqrt{2}$ 為無理數的證明）		不在命題範圍內	

數學 II（有限數學）、4 學分

主題	子題	內容	備註	數學甲考科	數學乙考科
一、數列與級數	1. 數列	1.1 發現數列的規律性	1.1.1 只談實數數列、不含二階遞迴關係 1.1.2 含等比數列、等比級數之正式定義，適當銜接在數學 I 第 3 章之中發展過的等比應用題型，作為學習此單元的前置經驗	＊＊	＊＊
		1.2 數學歸納法	1.2 不等式型式的數學歸納法置於數學甲／乙 II 數列與極限中討論		
	2. 級數	2.1 介紹Σ符號及其基本操作			
二、排列、組合	1. 邏輯、集合與計數原理	1.1 簡單的邏輯概念：介紹「或」、「且」、「否定」及笛摩根定律 1.2 集合的定義、集合的表示法與操作 1.3 基本計數原理（含窮舉法、樹狀圖、一一對應原理） 1.4 加法原理、乘法原理、取捨原理		＊＊	＊＊＊

二、排列、組合	2. 排列與組合	2.1 直線排列、重複排列 2.2 組合、重複組合	2.1 不含環狀排列 本章節要避免情境不合常理、過深、或同時涉及太多觀念的題型		
	3. 二項式定理	3.1 以組合概念導出二項式定理、巴斯卡三角形	3.1 不含超過二項的展開式		＊＊
三、機率	1. 樣本空間與事件	1.1 樣本空間與事件		＊＊	＊＊＊
	2. 機率的定義與性質 3. 條件機率與貝氏定理	2.1 古典機率的定義與性質 3.1 條件機率、貝氏定理、獨立事件	2.1 不含幾何機率	＊＊＊	
四、數據分析	1. 一維數據分析 2. 二維數據分析	1.1 平均數、標準差、數據標準化 2.1 散佈圖、相關係數、最小平方法	1.1 只談母體數據分析，不涉及抽樣，可用計算工具操作 2.1 可用計算工具操作。最小平方法的證明置於附錄	＊	＊＊＊
附錄	1. 演算法 2. 最小平方法	輾轉相除法、二分逼近法 最小平方法的證明		不在命題範圍內	

第二學年　數學Ⅲ（平面坐標與向量）、4 學分

主題	子題	內容	備註	數學甲考科	數學乙考科
一、三角	1. 直角三角形的邊角關係	1.1 直角三角形的邊角關係（正弦、餘弦）、平方關係、餘角關係		＊＊	＊＊（不含極坐標）
	2. 廣義角與極坐標	2.1 廣義角的正弦、餘弦、正切、平方關係、補角 2.2 弧度，弧度量與度度量的互相轉換 2.3 直角坐標與極坐標的變換	2.1 cot，sec，csc 置於數學甲Ⅰ、數學乙Ⅰ 2.2 將弧度量融入廣義角的教學，並於其後各節中使用弧度，強化度與弧度的轉換練習。由引進弧度所延伸出的問題僅限於度度量與弧度量之轉換練習，不要延伸到弧長與扇形面積		
	3. 正弦定理、餘弦定理	3.1 正弦定理、餘弦定理		＊＊＊	＊
	4. 差角公式	4.1 差角、和角、倍角、半角公式	4.1 不含和差化積、積化和差公式		
	5. 三角測量	5.1 三角函數值表 5.2 平面與立體測量	5.1 可使用計算器求出三角函數值		

二、直線與圓	1. 直線方程式及其圖形	1.1 點斜式 1.2 兩線關係（垂直、平行、相交）、聯立方程式		＊＊＊	＊＊＊
	2. 線性規劃	2.1 二元一次不等式 2.2 線性規劃（目標函數為一次式）		＊	
	3. 圓與直線的關係	3.1 圓的方程式 3.2 圓與直線的相切、相割、不相交的關係及其代數判定	3.2 不含兩圓的關係	＊＊＊	＊＊
三、平面向量	1. 平面向量的表示法 2. 平面向量的內積 3. 面積與二階行列式	1.1 幾何表示、坐標表示，加減法、係數乘法 1.2 線性組合、平面上的直線參數式 2.1 內積與餘弦的關聯、正射影與高、柯西不等式 2.2 直線的法向量、點到直線的距離、兩向量垂直的判定 3.1 面積公式與二階行列式的定義與性質、兩向量平行的判定 3.2 兩直線幾何關係的代數判定、二階克拉瑪公式		＊＊＊	＊＊＊

數學Ⅳ（線性代數）、4 學分

註：數學Ⅳ分為 A、B 兩版，B 版擴充了 A 版的內容，所增加的題材在課程綱要中以◎號區隔。

主題	子題	內容	備註	數學甲考科	數學乙考科
一、空間向量	1. 空間概念	1.1 空間中兩直線、兩平面、及直線與平面的位置關係	1.1 僅作簡單的概念性介紹	＊＊＊	＊＊
	2. 空間向量的坐標表示法	2.1 空間坐標系：點坐標、距離公式 2.2 空間向量的加減法、係數乘法，線性組合			
	3. 空間向量的內積	3.1 內積與餘弦的關聯、正射影與高、柯西不等式、兩向量垂直的判定			＊
	4. 外積、體積與行列式	4.1 外積與正弦的關聯、兩向量所張出的平行四邊形面積 ◎4.2 三向量所張出的平行六面體體積 ◎4.3 三階行列式的定義與性質	4.3 不含特殊技巧行列式題型		
二、空間中的平面與直線	1. 平面方程式	1.1 平面的法向量、兩平面的夾角、點到平面的距離		＊＊＊	＊
	2. 空間直線方程式	2.1 直線的參數式、直線與平面的關係 ◎2.2 點到直線的距離、兩平行線的距離、兩歪斜線的距離			
	3. 三元一次聯立方程組	3.1 消去法 ◎3.2 三平面幾何關係的代數判定			＊＊（只含消去法）

三、矩陣	1. 線性方程組與矩陣	1.1 高斯消去法（含矩陣的列運算）	1.1 重點在於矩陣三角化的演算法	＊＊＊	＊＊＊
	2. 矩陣的運算	2.1 矩陣的加法、純量乘法、乘法			
	3. 矩陣的應用	3.1 二階轉移矩陣、二階反方陣			
	◎ 4. 平面上的線性變換與二階方陣	4.1 伸縮、旋轉、鏡射、推移 4.2 線性變換的面積比	4.2 此處面積指兩向量所張出的平行四邊形面積		不考
四、二次曲線	1. 拋物線 2. 橢圓 3. 雙曲線	1.1 拋物線標準式 2.1 橢圓標準式（含平移與伸縮） 3.1 雙曲線標準式（含平移與伸縮）	不含斜或退化的二次曲線；不含直線與二次曲線的關係（指弦與切線）；不含圓錐曲線的光學性質	＊	＊

選修：數學甲 I 、4 學分

主題	子題	內容	備註	數學甲考科
一、機率統計	1. 隨機的意義	1.1 隨機的意義 1.2 期望值、變異數、標準差		＊＊＊
	2. 二項分布	2.1 獨立事件、重複試驗、二項分布、二項分布的性質		
	3. 抽樣與統計推論	3.1 抽樣方法：簡單隨機抽樣 3.2 亂數表 3.3 常態分布、信賴區間與信心水準的解讀	3.1 不含系統抽樣、部落抽樣	＊

二、三角函數	1. 一般三角函數的性質與圖形	1.1 弧度、弧長及扇形面積公式 1.2 倒數關係、商數關係、平方關係 1.3 三角函數的定義域、值域、週期性質與圖形	1.1 弧度量改以複習的形式引入	＊＊＊（不含橢圓的參數式）
	2. 三角函數的應用	2.1 波動：正餘弦函數的疊合 2.2 圓、橢圓的參數式	2.1 不含不同週期的三角函數疊合	
	3. 複數的幾何意涵	3.1 複數平面、絕對值、複數的極式、複數乘法的幾何意義 3.2 棣美弗定理，複數的 n 次方根		

數學甲 II 、4 學分

主題	子題	內容	備註	數學甲考科
一、極限與函數	1. 數列及其極限	1.1 兩數列的比較 1.2 數列的極限及極限的性質 1.3 無窮等比級數、循環小數 1.4 夾擠定理	1.2 以圖形、電腦展示的範例建立學生對於極限的直觀 1.4 可用圖形或面積意涵說明夾擠定理	＊＊＊
	2. 函數的概念	2.1 函數的定義、圖形、四則運算與合成函數		＊＊
	3. 函數的極限	3.1 函數的極限 3.2 連續函數、介值定理		＊＊＊

二、多項式函數的微積分	1. 微分	1.1 導數與切線 1.2 微分的加、減、乘運算		＊＊＊
	2. 函數性質的判定	2.1 遞增、遞減、凹凸性、函數極值的一階與二階檢定法 2.2 三次多項式的繪圖		
	3. 積分的意義	3.1 定積分的意義 3.2 微積分基本定理 3.3 多項式函數的定積分與不定積分的計算	3.3 不涉及分部積分與變數變換法	
	4. 積分的應用	4.1 以求圓面積、球體體積、角錐體體積、解自由落體運動方程式為主		
附錄	牛頓求根法			不在命題範圍內

數學乙 I 、3 學分

主題	子題	內容	備註	數學乙考科
一、機率統計	1. 隨機的意義	1.1 隨機的意義		＊＊＊
	2. 期望值、變異數、標準差	2.1 期望值、變異數、標準差		
	3. 獨立事件	3.1 獨立事件		
	4. 二項分布	4.1 重複試驗、二項分布、二項分布的性質		
	5. 抽樣與統計推論	5.1 抽樣方法：簡單隨機抽樣 5.2 亂數表 5.3 常態分布、信賴區間與信心水準的解讀	5.1 不含系統抽樣、部落抽樣	

二、三角函數	1. 弧度、弧長 2. 一般三角函數的性質與圖形	1.1 弧度、弧長及扇形面積公式 2.1 倒數關係、商數關係、平方關係 2.2 三角函數的定義域、值域、週期性質與圖形	1.1 弧度量改以複習的形式引入	*

數學乙 II 、3 學分

主題	子題	內容	備註	數學乙考科
一、極限與函數	1. 數列及其極限 2. 無窮等比級數	1.1 兩數列的比較 1.2 數列的極限及極限的性質 2.1 無窮等比級數 2.2 循環小數 2.3 夾擠定理	1.2 以圖形、電腦展示的範例建立學生對於極限的直觀 2.3 可用圖形或面積意涵說明夾擠定理	* * *（不含夾擠定理）
	3. 函數的概念 4. 函數的極限	3.1 函數的定義、圖形、四則運算與合成函數 4.1 函數的極限 4.2 連續函數、介值定理		* *